$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, S.141 Nr. 4 h)

Untersuchung der Funktion auf Nullstellen:

$f(x) = 0 \iff x\,(x^2 - 4x + 3) = 0 \iff x = 0 \lor (x - 1)(x - 3) = 0 \iff x = 0 \lor x = 1 \lor x = 3$

ergibt drei Nullstellen $N_1(0 \mid 0)$, $N_2(1 \mid 0)$ und $N_3(3 \mid 0)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^3 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 - 0 + 0$$

also $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Damit ist der Verlauf des Graphen klar. Zwischen N_1 und N_2 wird es ein Maximum geben und zwischen N_2 und N_3 wird es ein Minimum geben.

Untersuchung der Funktion auf Extrema:

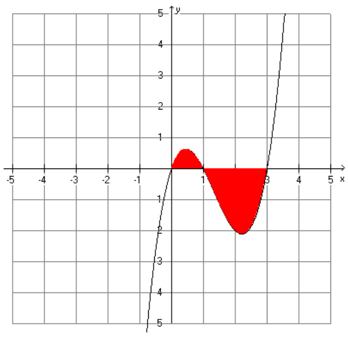
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$, Die notwendige Bedingung

$f'(x) = 0 \iff x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 0 \iff x_{1/2} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - 1} \iff x_1 = 0{,}4514$ und $x_2 = 2{,}2152$

$f(x_1) = 0{,}6311$ und $f(x_2) = -2{,}1126$. Die Auswertung der zweiten Ableitung $f''(x) = 6x - 8$ bestätigt:

$f''(x_1) = -5{,}9215 < 0 \Rightarrow$ Max.$(0{,}4514|0{,}6311)$ und $f''(x_2) = 5{,}9215 \Rightarrow$ Min.$(2{,}2152|-2{,}1126)$

Die Skizze des Graphen:



Flächeninhalt:

Zur Berechnung des Flächeninhaltes A_0^3 ist die Fläche in zwei Teilflächen A_0^1 und A_1^3 aufzuspalten, da die Funktion im ersten Intervall über und im zweiten Intervall unter der x-Achse liegt. Daher Betragsfunktion nicht vergessen!

Eine Stammfunktion ist $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

$$A_0^1 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{5}{12} = 0{,}4166$$

$$A_1^3 = \left|\int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx\right| = \left|\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2} - \frac{5}{12}\right| = \frac{8}{3} = 2{,}6666$$

$$A_0^3 = A_0^1 + A_1^3 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} = 3{,}0833$$